La entrevista clínica en la construcción del conocimiento sobre el algoritmo de la división

Alfonso Javier Bustamante Santos &

Rosa del Carmen Flores Macías&&

Resumen

En esta contribución se describe el proceso seguido a una estudiante de sexto de primaria al reformular sus conceptuaciones sobre algunos aspectos del algoritmo escrito de la división, a partir de las intervenciones del entrevistador, quien toma la función de mediador entre los razonamientos de la estudiante y las relaciones matemáticas en el problema planteado.

En particular queremos mostrar cómo, a través del planteamiento de situaciones problemáticas, algunas incluso fantasiosas o absurdas, se reconstruyeron ciertos conceptos sobre el algoritmo escrito de la división.

El estudio se sustenta en diferentes referentes: el análisis microgenético, la teoría de los campos conceptuales y la teoría de la representación. En particular el análisis se enfoca en los conceptos y teoremas en acto de la alumna y cuyo significado se transforma durante las interacciones con el entrevistador.

Palabras clave: educación básica, proporcionalidad, resolución de problemas, algoritmo.

Abstract

In this contribution, the process of conceptual reformulation regarding some aspects of the written algorithm for the division algorithm is described. Such reformulation is observed in a student of the sixth grade of elementary school (in México) and takes place through the interviewer's interventions, who adopts the role of mediator between the student's reasoning and the mathematical relations in the problem.

In particular, the aim of this work is to show how, by offering problematic —or even unreal or absurd— situations, certain concepts related to the written algorithm for the division are re-built.

The conceptual frame for the study is the microgenetic analysis, the theory of conceptual fields and the representation theory. Especially we focus the analysis in how concepts and theorems evolve during the interaction with the interviewer. Keywords: basic education, proportionality, problem solving, algorithm.

Una exposición del problema de investigación

Este artículo tiene como propósito principal mostrar, en el nivel microgenético, los cambios conceptuales que manifiesta una estudiante de sexto grado de primaria, que son propiciados por la interacción con un interlocutor que asume el rol de profesor durante la entrevista clínica.

Este trabajo tiene como antecedente el estudio de Bustamante y Vaca (2014) en el que se analizan los resultados obtenidos por 309 estudiantes de primaria y secundaria durante la resolución de un problema matemático del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. En dicho estudio se descubrió que algunas de las dificultades experimentadas por los estudiantes se relacionan con la vinculación de los diferentes sistemas simbólicos implicados en los procesos de resolución, así como con la construcción inicial de ciertos conceptos matemáticos que deberían estar ya dominados en sexto grado de primaria y tercero de secundaria.

Ahora nos proponemos describir cómo, a través de las intervenciones del mediador, la alumna modifica conceptuaciones acerca de la división que le impiden resolver correctamente el problema planteado.

El problema en cuestión es el siguiente:

&Dr. Alfonso Javier Bustamante Santos. Institución: Instituto de Ciencias de la Educación UABJO.

Ha investigado principalmente sobre dos temas: el impacto de las nuevas tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas; y actualmente sobre la relación entre los sistemas de representación en la resolución de problemas aritméticos en educación básica. Ha diseñado y evaluado software educativo multimedia para el aprendizaje de matemáticas así como para el reporte de investigaciones.

&&Dra. Rosa del Carmen Flores Macías. Institución: Facultad de Psicología UNAM.

Ha investigado principalmente sobre el desarrollo del pensamiento matemático y los procesos de representación, al respecto tiene diversas publicaciones. Actualmente sobre la enseñanza del álgebra temprana.

Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos?

Pertenece al campo conceptual de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1990, 2009) porque la relación de base es cuaternaria y por el isomorfismo de medidas, que pone en relación dos de diferente naturaleza: en este caso, número de pasos y número de metros.

Hay dos procedimientos para resolver este tipo de problema (Vergnaud, 2004, p. 202). El primero requiere aplicar un operador escalar. Si en la columna de los pasos (a la izquierda, v. Fig. 1) el operador escalar x70 hace pasar de 1 paso a 70 pasos, entonces en la columna de los metros se aplica el operador ÷70, que es el operador inverso, y hará pasar de 35 metros a la medida de la unidad, es decir, a 0.5 metros.

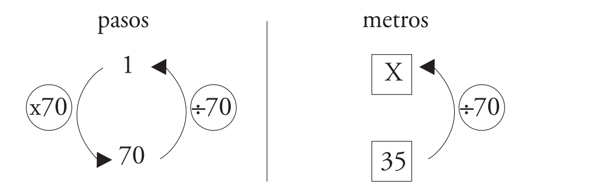

Figura 1. Esquema de relaciones verticales con operadores escalares

El segundo procedimiento (v. Fig. 2) es aplicar el operador función +2 metros/paso que hace pasar de 70 pasos a su medida en metros (35), lo que implica dividir 1 paso entre 2 metros/paso para obtener el valor unitario en metros.

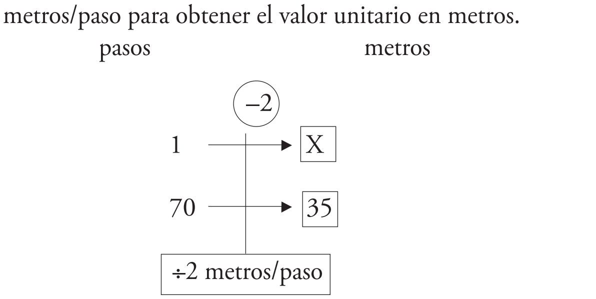

Figura 2. Esquema de relaciones horizontales con operadores función proporcional.

Este procedimiento es de mayor complejidad por los cálculos relacionales que intervienen, se trata de un operador función proporcional que hace pasar de una categoría de medida a otra (de pasos a metros).

En una primera fase de la investigación, este problema y algunas variantes fueron aplicados a estudiantes de sexto de primaria y tercero de secundaria de escuelas públicas del estado de Veracruz (Bustamante y Vaca, 2014), para conocer las formas en que los resuelven. Con base en los resultados obtenidos, se realizó la segunda fase, consistente en entrevistas clínicas a algunos de los estudiantes y en el análisis microgenético del procedimiento empleado por una de ellos. El análisis más general se reporta en otra contribución: Bustamante y Flores (enviado a publicación).

Teoría operatoria de la representación: cálculo relacional y representación calculable

Dos de los conceptos que emplearemos para explicar los procesos observados y analizar las respuestas de la estudiante son cálculo relacional y representación calculable, ambos propuestos por Gérard Vergnaud (2004), hay dos grandes categorías de cálculo relacional:

- deducir una conducta o una regla de conducta a partir de relaciones constatadas o aceptadas;
- deducir nuevas relaciones a partir de relaciones constatadas o aceptadas.

Estos cálculos se llevan a cabo en los diferentes planos de representación de los que se deriva la representación calculable. De acuerdo con este autor, "la noción de representación ha vuelto al primer plano de las preocupaciones de los psicólogos, después de haber sido deliberadamente ignorada por un gran número de experimentalistas durante muchos años" (Vergnaud, 2015, p. 225) y "la noción de cálculo relacional contribuye a clarificar y hacer explícita la noción, demasiado vaga, de razonamiento" (Vergnaud, 2004, p. 28).

Vergnaud (2015) define la representación como una construcción hipotética que se debe inferir a partir de las conductas observables del sujeto. Se pueden formular una gran variedad de hipótesis a partir de las representaciones, por lo que solo es posible operacionalizar esta noción si son calculables, es decir, si se prestan para un cálculo relacional.
Dado que Vergnaud considera que la representación no es unívoca a la realidad, sino que hay varias representaciones y además diferentes niveles de ellas, también toma en cuenta las correspondencias entre los diferentes planos de representación, a los que llama homomorfismos ("misma estructura"). Así, en la representación de lo real debe haber una estructura homomorfa que permita hacer las operaciones (de pensamiento) que eventualmente darán lugar a la solución del problema, pero en el plano de lo real.

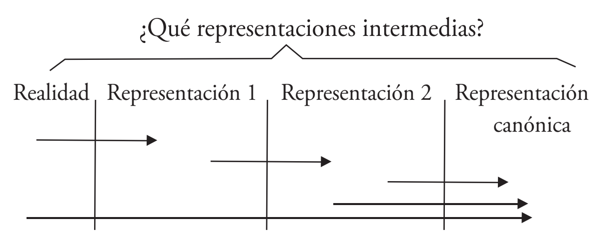

Figura 3. Planos de representación (tomada de Vergnaud, 2015).

ICEUABJO 2016

En la Figura 3 se esquematizan las relaciones entre diferentes planos de representación. La cuestión aquí es entender cuáles son las representaciones que los estudiantes deben tener previamente para hacer una representación correcta de un problema matemático.

La noción de homomorfismo es crucial para comprender las relaciones entre los diferentes planos de representación:

> Ahora bien, un sistema no puede calcular sobre otro sistema si no existe un homomorfismo del sistema representado en el sistema representante. Quien dice homomorfismo no dice isomorfismo. En la aplicación realidad-representación, son clases de aspectos, relaciones y procesos que son representados para entrar en los cálculos, no fenómenos singulares (Vergnaud, 1991, p. 15, la traducción es nuestra).

Con base en lo anterior, Vergnaud (2015) propone cuatro conclusiones:

> 1.ª la noción de representación no es unívoca, en el sentido de que jamás se puede hablar de una sola representación posible y útil;
>
> 2.ª Esta permite explicar cómo un sujeto resuelve los problemas de la realidad y también cómo ciertas representaciones de alto nivel son precedidas por otras más débiles que es importante analizar;
>
> 3.ª los homomorfismos entre representaciones están en el centro de la actividad cognitiva. Sin duda hay que buscar las mejores representaciones, pero es también útil poner en juego las correspondencias entre representaciones diferentes;
>
> 4.ª la representación se aplica a estados, eventos que son diacronías de estado, relaciones o transformaciones que son clases de sincronías o de diacronías, a clases de relaciones o de transformaciones, y a invariantes (p. 237).

A partir de lo anterior es necesario definir algunos conceptos importantes para comprender el proceso de resolución: las nociones de campo conceptual y de esquema.

Teoría de los campos conceptuales

Esta teoría tiene como propósito describir y analizar la complejidad progresiva de las competencias matemáticas que los estudiantes desarrollan dentro y fuera de la escuela, y establecer las relaciones entre la forma operatoria y la forma predicativa del conocimiento. Un campo conceptual se define como un conjunto de situaciones y un conjunto de conceptos estrechamente vinculados (Vergnaud, 2009).

Gérard Vergnaud (1990 y 2009) propone una clasificación de las situaciones en función de las relaciones matemáticas y las conceptualizaciones implicadas en cada una de ellas. Para el análisis de los procedimientos, su noción de esquema resulta muy pertinente pues permite entender las respuestas de los estudiantes. Es por ello que la teoría de los campos conceptuales nos parece una herramienta muy útil para explicar los procesos de resolución en función de las conceptualizaciones movilizadas y de los sistemas de representación usados por los estudiantes.

Vergnaud señala que en la epistemología genética se considera que el conocimiento es un proceso de adaptación, pero que es teóricamente más productivo asumir que lo que se adapta son los esquemas a las situaciones. Este autor enriquece la noción de esquema piagetiano al considerar en ellos los siguientes componentes (Vergnaud, 2009):

el aspecto intencional de los esquemas. Involucra una o varias metas que pueden ser desarrolladas en sub-metas y anticipaciones.

- el aspecto generativo de los esquemas. Involucra reglas para generar la actividad; concretamente, la secuencia de acciones, la toma de información y los controles.
- el aspecto epistémico de los esquemas. Involucra las invariantes operatorias, conceptos-en-acto y teoremas-en-acto; su principal función es recoger y seleccionar información relevante e inferir de ella metas y reglas.
- el aspecto computacional. Involucra posibilidades de inferencia, esenciales para entender que el pensamiento está compuesto de una intensa actividad de cómputo; incluso en situaciones aparentemente simples, y aún más en situaciones nuevas, es necesario generar metas, sub-metas y reglas, además de propiedades y relaciones que no son observables.

Un teorema-en-acto tiene la categoría lógica de las proposiciones, es decir, son afirmaciones a las que un individuo puede atribuir un valor de verdad, aunque matemáticamente sean falsas, como se verá más adelante en el estudio. Un concepto-en-acto no es una proposición por lo que no puede considerarse verdadero o falso, solo puede ser pertinente o no pertinente ante una situación determinada.

Estas dos nociones son muy importantes para este trabajo porque amplían el alcance de los conceptos y los teoremas hasta aquello que el sujeto no puede explicitar verbalmente y que está contenido en sus acciones y actividades. Estos son conocimientos en acción. Al observar cómo los estudiantes resuelven los problemas, con base en sus acciones podemos inferir cuáles son estos conceptos y teoremas, y cómo los movilizan en la resolución.

Vergnaud propone dos campos conceptuales para la matemática elemental, a partir de los cuales se pueden clasificar los problemas: el de las estructuras aditivas y el de las estructuras multiplicativas. El primer campo es el conjunto de situaciones que requieren una adición, una sustracción o una combinación de estas operaciones. El de las estructuras multiplicativas es el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de ellas (Vergnaud, 1990).

Ahora bien, para sustentar la metodología empleada en el presente estudio, enseguida se revisarán aspectos relevantes del método clínico o crítico, y del método de análisis microgenético.

El método clínico

Piaget (1978) considera que este método de recolección de datos conserva las ventajas tanto de la observación como de los test y no tiene sus desventajas, como dejar pasar por alto los problemas esenciales y los intereses espontáneos. No obstante, a diferencia de los otros métodos, no es fácil de llevar a cabo: requiere que el entrevistador tenga entrenamiento y cumpla ciertas características. Piaget dice:

> El arte del clínico consiste, no en hacer contestar, sino en hacer hablar libremente y en descubrir las tendencias espontáneas, en vez de canalizarlas y ponerlas en diques. Consiste en poner todo síntoma en un contexto mental, en lugar de hacer abstracción de ese contexto (Piaget, 1978, p. 258).

Este método sigue estando vigente, a pesar de su larga trayectoria. Trevor Bond y Erin Bunting (1995) realizaron un estudio cuyos resultados, según los autores, son suficientes para convencer a los empiristas escépticos de la validez de la teoría Piagetiana.

Uno de los objetivos de la entrevista clínica ha sido proponer situaciones en las que se pudieran desencadenar procedimientos a través de los cuales inferir los teoremas y conceptos-en-acto, y explicitarlos. Piaget lo expresó en otras palabras:

> El contenido es un sistema de creencias íntimas, y se necesita una técnica especial para llegar a descubrirlas. Es sobre todo un sistema de tendencias, de orientaciones de espíritu, de las cuales el propio niño nunca ha tenido conciencia y nunca ha hablado (Piaget, 1978, p. 258).

La forma y el funcionamiento del pensamiento se manifiestan cada vez que el niño se pone en relación con sus compañeros o con el adulto; entonces la interacción es una forma de comportamiento social que puede observarse desde el exterior. El contenido, por el contrario, se descubre o no, según los niños y según los objetos de representación (Piaget, 1978).

Las microgénesis situadas

Del constructivismo clásico piagetiano, cuyo sujeto es epistémico, se desprende la corriente de las microgénesis situadas, que ubica a un sujeto en particular enfrentado una situación particular. Una primera definición de microgénesis es: “estudio de los procesos de adquisición de conocimientos en un tiempo corto y en una situación particular entre las situaciones posibles de adquisición, resolviendo los problemas por instrucción, por exploración libre, etc.” (Nguyan-Xuan, 1990, p. 197, citado en Saada-Robert y Balslev, 2015, p. 398). A esta definición, Saada-Robert y Balslev (2006) agregan la dimensión didáctica para conformar la microgénesis situada:

> Sólo con esta condición tal estudio puede ligarse con la explicación de los microprocesos de adquisición de conocimientos. En cuanto al carácter situado de las microgénesis, éste remite a la dimensión didáctica de esa adquisición, dicho de otra manera, al estudio triádico de la construcción de los saberes de enseñanza y de aprendizaje tal como ellos funcionan in situ. Más precisamente, las microgénesis situadas se ocupan de la dimensión didáctica a través del análisis de la progresión de los saberes vinculados con el intercambio de las significaciones entre participantes, en tiempo y lugar reales (Saada-Robert y Balslev, 2006, p. 400).

Además, en la investigación el entrevistador adopta el papel de maestro, pues durante la fase de interacción con el estudiante, además de explorar sus procesos de resolución del problema, busca plantearle situaciones nuevas que lo hagan llevar sus ideas al límite. De esta manera, puede hacer que, en lo posible, las explicite, las ponga a prueba o las modifique para generar otras, nuevas y más generales. Es decir, el entrevistador lo lleva a la zona del desarrollo potencial por medio de la actualización o modificación de sus esquemas para el contenido específico de la tarea realizada.

Durante la entrevista, el entrevistador propone problemas nuevos de diferentes ámbitos e incluso algunos aparentemente absurdos. Algunas veces así se logra que el estudiante reflexione sobre los conceptos movilizados. En otras ocasiones no se logra, debido al carácter improvisado de los problemas, planteados en función de las rutas de razonamiento que muestre cada estudiante.

Esta modalidad flexible de la entrevista clínica ha sido inspirada por el trabajo de Claire Blanche-Benveniste y Emilia Ferreiro (1998), quienes, al investigar la expresión de negación de niños hispanohablantes para reflexionar sobre la escritura, propusieron a los sujetos un juego consistente en decir las cosas al revés. Una de las preguntas hechas a los niños fue "¿Cuál es el revés de uva?", cuya respuesta más frecuente fue "Uvo".

Lo que podría considerarse una instrucción muy general o incluso interpretarse como absurda, permitió a las autoras indagar sobre los conocimientos que ponen en juego los estudiantes (por ejemplo: decidirse por una respuesta semántica o una formal, o el dominio de la morfología de la lengua) y contribuyó a construir índices sobre la representación de la unidad palabra fuera del ámbito escrito.

Con base en estos antecedentes, se desarrolló una entrevista clínica y un análisis microgenético, con el propósito hacer una indagación del nivel de construcción de los conceptos matemáticos movilizados en la estudiante, en función de las inferencias realizadas durante la exploración de sus procedimientos.

Por razones de economía de espacio, se presenta una síntesis de los procedimientos de la alumna donde se enfatizan los sistemas de representación empleados y se describe cómo fueron cambiando las significaciones durante la entrevista.

Diseño metodológico

Descripción del caso

Al momento de la entrevista, Andrea (11.3 años) cursaba el último bimestre de sexto grado en una escuela pública de la capital del estado de Veracruz. En el primer estudio, donde se hizo una aplicación grupal del problema, ella fue una de las estudiantes que dio una respuesta considerada correcta. La Imagen 1 muestra el resultado y las operaciones que realizó.

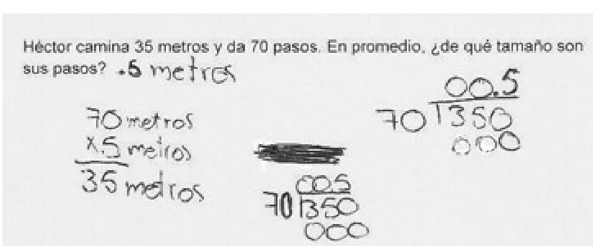

Imagen 1. Producciones de Andrea en la fase experimental (Bustamante y Vaca, 2014).

Como puede observarse en la Imagen 1, la estudiante llega a la respuesta correcta y la escribe de manera convencional. No podemos saber verdaderamente cómo llegó a ese resultado, pero podemos inferirlo a partir de las producciones gráficas en su hoja de respuesta: aparentemente, la obtuvo a través del algoritmo de la división, operación que realizó dos veces con el mismo resultado. Además puede apreciarse que comprobó su resultado por medio de una multiplicación.

Andrea representó de manera canónica el algoritmo escrito de la división y lo resolvió correctamente. Resulta interesante que haya repetido la operación y el resultado, porque los otros estudiantes que realizaron dos divisiones, habían puesto los operadores intercambiados (70÷35 y 35÷70) y luego elegían el resultado que consideraban más apropiado. Finalmente es de resaltar que, a pesar de tener a su disposición una calculadora —al igual que todos en su grupo—, Andrea realizó operaciones escritas y las desarrolló de esa manera.

Durante la entrevista, Andrea se ubicó en una situación de evaluación en un contexto escolar frente a la figura de un interlocutor al que ella, seguramente, le atribuyó el rol de profesor (y, por lo tanto, el de mediador entre el contenido matemático movilizado y sus conocimientos previos). Entonces, ella asumió el rol de alumna.

Análisis microgenético de los procedimientos de resolución de Andrea

Durante el análisis microgenético es posible identificar quién asume el control de la situación y sobre qué contenido matemático se está interactuando.

Para fines de exposición y por cuestiones de espacio, mostraremos la parte inicial de la resolución del problema y solo expondremos los puntos en donde Andrea o el entrevistador toman el control de la situación para convencer al otro. De esta manera podremos observar cómo se van modificando los conceptos movilizados.

Primera fase de la entrevista: lectura del problema y resolución inicial

Andrea toma el control inicial de la situación hasta dar con el resultado que considera correcto. Expresa verbalmente lo siguiente (que corresponde al texto del problema):[1]

> Héctor camina 35 metros y da 70 pasos. En promedio, ¿de qué tamaño son sus pasos? [¿Qué le entendiste?] Yo digo que

---

[1]Código de transcripción: entre corchetes se expresan las intervenciones del entrevistador; fuera de ellos, las expresiones de la estudiante; los paréntesis indican acotaciones tanto del entrevistador como de la estudiante, según estén dentro o fuera de los corchetes; con subrayado se reproduce lo que los participantes escriben en papel.

él camina en 70 pasos 35 metros, entonces ¿debo dividir 35 metros entre 70?... para que me dé el resultado de cuánto mide cada paso [Ajá] (divide 70÷35 y obtiene 2) Y da a dos [Y da, dos... y dos, ¿qué será? Escribe tu respuesta] 2 metros [¿2 metros?] Sí [Ok, ¿qué opinas de tu resultado?] Pues ¿que están muy grandes los pasos? [Como de dónde a dónde] (señala una distancia aproximada a 2 metros) [Entonces sí están muy grandes, pero eso dio] Ajá.

En su resultado inicial, Andrea llega al resultado 2, por medio de una división escrita; no expresa las unidades de medida. Es a petición del entrevistador que ella menciona que el 2 se refiere a los metros.

En este punto, ella da por concluido el proceso de resolución, posiblemente debido a la situación de interacción y al nivel de exigencia a la que puede estar acostumbrada en el salón de clases. No contempla la posibilidad de comprobar si el resultado es correcto o no, ni reconoce autónomamente la diferencia entre su expresión verbal y aquella escrita en la división. Tampoco se da cuenta de que el orden de los “datos” en la división es importante para determinar el resultado (aquí, a diferencia de en la multiplicación, el orden de los factores sí altera el cociente). Son estos teoremas-en-acto, y otros que surgen durante la entrevista, los que se van a problematizar para orientarlos hacia formas más convencionales, con la ayuda del mediador.

En la expresión oral “¿debo dividir 35 metros entre 70?... para que me dé el resultado de cuánto mide cada paso”, Andrea expresa adecuadamente la operación para encontrar el resultado por medio del operador escalar sin dimensión (v. esquema 1). Sin embargo, escribió una distinta: 70÷35; es decir, escribe la división con galera en el mismo orden en que la enuncia. En términos de Duval (2006), esto revela una falta de habilidad para cambiar de un registro a otro entre dos sistemas de representación: oralidad y escritura. Sin embargo, ¿en qué consistiría tal habilidad, específicamente? Consideramos que consiste en el reconocimiento de las semejanzas y diferencias entre distintos sistemas simbólicos, así como en el dominio conceptual tanto del algoritmo escrito de la división como de las relaciones proporcionales en el problema.

Según se observa en los Esquemas 1 y 2, los cálculos relacionales para encontrar el valor de un paso a través de dos operadores, es posible aplicar el operador escalar ÷70 a la medida conocida (en este caso, los 35 metros) o aplicar el operador *función proporcional* ÷2 al valor unitario de un paso para encontrar su medida correspondiente en metros.

Ahora bien, aunque Andrea expresó correctamente, en lo verbal, la operación que la llevaría al resultado numérico correcto por medio del primer procedimiento (esquema 1), dividió 70 pasos entre 35 metros, lo que en el esquema 1 consiste en encontrar el valor numérico del operador de la función proporcional (2) y no la medida de un paso. ¿Qué pudo haber causado esta falta de correspondencia entre los dos sistemas de representación?

Para Andrea es invisible la relación entre el orden de los datos en la expresión oral y su correspondencia con la expresión escrita. Ella resuelve correctamente el algoritmo representado 70÷35=2 cuyo resultado interpreta como “2 metros”. Además, aunque identifica la imposibilidad real de dar pasos de 2 metros, esto no es suficiente para que ella deduzca que el resultado es incorrecto. Quizá esto sucede porque en los problemas escolares los niños comúnmente enfrentan problemas que no corresponden con la realidad cotidiana y que tienen resultados fantasiosos.

Para este trabajo solo reportaremos el proceso de construcción y reconstrucción de algunos teoremas-acto, como los mencionados anteriormente, y otros inferidos desde la entrevista clínica. Estos teoremas tienen que ver con el establecimiento de la relación entre escritura y oralidad, el orden de los datos en la división escrita y la posibilidad de fragmentar unidades discretas.

Segunda parte de la entrevista: teoremas-en-acto, develación y puesta a prueba

Dada la disposición de Andrea para comprender la solución del problema, se le plantearon una serie de problemas en función de las ideas que iba formulando, con la intención de que, en interacción con el mediador, construyera nuevas explicaciones respecto al tema del orden de los datos en la división. En este proceso se aprecia que Andrea construye algunos teoremas-en-acto y modifica otros para conceptualizar el problema.

Teorema-en-acto "si se invierten los datos en la división escrita, la unidad del cociente no cambia": integración de las nociones de proporción y medida

A continuación, el entrevistador usa problemas más simples, de diferentes ámbitos y con distintos tipos de cantidades, con la finalidad de identificar las diferencias de significado de los resultados al invertir los datos en la división. Incluso se proponen divisiones absurdas como dividir niños entre pasteles o entre barras de chocolate.

[Pero ahora... si yo te digo divide 3 barras de chocolate entre 2 niños] 2 entre 3 [¿Cómo lo harías?] Sería… (piensa un momento y hace la galera de la división) las 3… las 3 barras (agrega el dividendo) 3 entre los 2 niños (agrega el divisor) 3÷2 [Emm… las 3 barras, ¿sí la puedes terminar?] Sí, daría a uno punto cinco 1.5 (solo escribe el residuo parcial 10) [¿Qué significa esto?] Una barra y media (Imagen 2).

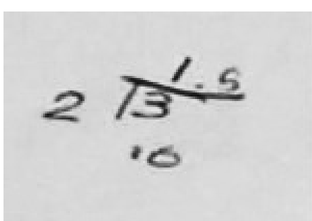

Imagen 2. Tres barras de chocolate entre dos niños es igual a una barra y media.

Primero expresa verbalmente "2 entre 3", la relación inversa a la indicada. (Posiblemente está traduciendo el enunciado para hacerlo coherente con la división; sin embargo, con los datos obtenidos no es posible comprobarlo.) Luego piensa un momento y traza la galera. Esto puede significar que tanto el entrevistador como Andrea se encuentran en una zona de comprensión. En términos de Saada-Robert y Balslev (2015) ambos interlocutores comparten la misma significación y por lo tanto comparten el mismo objetivo: saber cómo acomodar los datos. El hecho de dibujar la galera en primer lugar nos indica que ha tomado conciencia del conflicto por resolver: cómo colocar los números en la división escrita. Efectivamente están en la zona de comprensión. Inicialmente, ella se regía con las reglas del sistema de escritura alfabético, pero este dato confirma que ahora ya no. Decide correctamente ubicar como dividendo el número 3, que representa la cantidad de barras de chocolate, y como divisor el número 2, que representa a los niños. Una vez que ha establecido la relación entre los datos —en este caso, adecuada con la expresión del entrevistador pero opuesta a su propia expresión oral inicial— resuelve el algoritmo correctamente: obtiene 1 como cociente parcial y también como residuo; agrega un punto decimal y "baja un cero". Entonces completa el cociente, que queda en 1.5 y ella interpreta correctamente como "una barra y media".

El entrevistador le pide que la resuelva porque de esa manera podrán reflexionar sobre el resultado de la próxima división, que será del mismo ámbito, pero ahora se repartirán los niños entre las barras y el dividendo será menor que el divisor.

[Ahora, si te digo… divide… 5 niños entre 10 barras] (escribe primero el dividendo, después la galera y al final el divisor; v. Imagen 10) 10/5 [Y ¿a cuánto te daría?] Me daría a 2 2 [¿2 qué?] Mmm… 2 barras (v. Imagen 3).

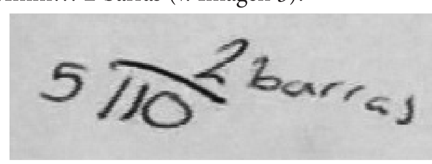

Imagen 3. 5 niños entre 10 barras de chocolate es igual a dos barras

Esta división pone en juego dos dificultades adicionales: el dividendo es menor que el divisor y la idea de dividir niños entre barras es contraintuitiva o absurda. Sin embargo, ante esta situación, Andrea no integra las relaciones entre medida y proporción. Aquí el plano concreto domina completamente y no le permite percatarse de que se trata de dividir los niños entre las barras en un plano aritmético. Ante 10 barras y 5 niños lo más natural y obvio es lo que contestó Andrea, "dos barras a cada niño", aunque la intención del entrevistador era otra: invertir los elementos en la división para ver si ella también los invertía.

En seguida, se le plantea una división con las mismas características, pero ahora con canicas.

[¿Cómo divides, eh… vamos a poner… 20 canicas entre 40 niños?] 20 canicas adentro y 40 va a fuera 20÷40 (escribe en primer lugar el dividendo, luego la galera y después el divisor; v. Imagen 4) 20 canicas entre 40 [¿Cuántas les tocan?] Les tocan… de punto cinco 5… [¿Se puede?] No, pero tampoco le daría porque así normal son 20 canicas entre 40 niños, no le tocaría una a cada uno, tendrían que ser de 40 para arriba.

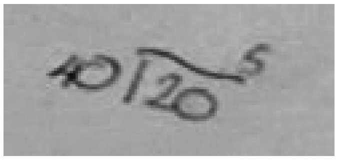

Imagen 4. 20 canicas entre 40 niños es igual a 0.5.

En esta división podemos observar que Andrea empieza a considerar el significado integrado de los conceptos de proporción y medida al dividir. Se da cuenta de que debería haber el mismo número de canicas que de niños para poderlas repartir de tal modo que a cada uno le toque por lo menos una canica completa. Aunque obtiene 0.5 de resultado, menciona que no se puede. Es decir, no contempla la posibilidad de fraccionar las canicas, por ser una cantidad discreta. Además ¿quién aceptaría media canica? Nuevamente nos encontramos con la importante "referencia al plano concreto", ¿qué es válido con respecto a la experiencia?

Puesto que resulta absurdo repartir "medias canicas", se propone una división similar pero ahora con paletas, con el dividendo menor al divisor.

> [¿Cómo divides… 10 paletas entre 20 niños?] Pues las paletas adentro y los niños afuera (anota el dividendo, luego la galera y después el divisor) 10÷20 Entonces sería a punto cinco [Este… em … ¿ya te aburriste?] No [¿No?] (risas).

Esta vez representa y resuelve adecuadamente la operación. Un avance importante es que ahora que moviliza los conceptos, ha trascendido el apego a la forma de la escritura alfabética: escribe de derecha a izquierda. Es decir, empieza por el dividendo. También se puede observar que es a través de la discusión como comienza a identificar una invarianza en la correspondencia oral-escrito que se constituirá en un teorema-en-acto: "el primer objeto anunciado por el entrevistador será el dividendo y el segundo, el divisor".

Ahora se le plantean dos divisiones, una con el divisor mayor que el dividendo y viceversa, pero ambas con la longitud como dividendo. En un primer momento Andrea deduce que "los metros van dentro de la casita".

> [5 metros de listón entre 10 niños] (escribe el dividendo, luego la galera y al final el divisor 5/10 y esta vez resuelve la operación sin que se le solicite) El resultado es punto cinco .5, medio metro sería.

Con estas divisiones, Andrea empieza a tomar en cuenta el significado de lo que escribe en la división; deja de establecer la correspondencia con la oralidad y además interpreta adecuadamente el resultado numérico con su respectiva unidad de medida.

> [Ahora 20 metros de listón entre 2 niños] 20 metros de listón entre 2 niños 20÷2 (escribe primero el dividendo, luego la galera y después añade el divisor y al final el cociente, sin escribir el residuo) 10 a 10 metros cada uno.

No le representa ninguna dificultad. Hasta ahora ha sido sistemática en escribir como dividendo el primer dato expresado verbalmente por el entrevistador. En la siguiente intervención se cambia el sentido de la relación. Lo que se dividirá son niños entre metros de listón.

> [Y ¿si divides 10 niños entre 2 metros de listón?] 2÷2 [10 niños entre 2 metros] (corrige y escribe sobre la operación anterior y la resuelve) 10÷2 Serían 5 5 [¿5 qué?] m 5 metros cada quien.

Andrea escribe la división convencionalmente. Ha identificado, como expresa más adelante, la regularidad de que el primer dato enunciado es el dividendo. Obtiene como cociente 5, pero lo interpreta como metros. Esta respuesta puede deberse principalmente a dos razones no excluyentes. La primera es que no hay homomorfismo entre el plano aritmético y el plano concreto; en una situación "cotidiana" generalmente son los metros de listón los que se reparten entre los niños y no los niños entre los listones, y por lo tanto es muy poco probable que a alguien se le ocurra plantear esa división. La segunda razón es la posibilidad de que haya disociado las unidades (por un lado la cantidad y por otro la unidad), escribiendo según el teorema-en-acto "el primer dato enunciado es el dividendo", en este caso 10 y luego aplicando el teorema-en-acto "los metros van dentro de la casita", lo que entonces convierte la división en "10 metros entre 2 niños", que da como resultado "5 metros a cada quien", según expresa verbalmente.

A partir de lo anterior, el entrevistador centra la atención de Andrea sobre la operación de dividir niños entre metros. Andrea repite oralmente la división propuesta, expresa correctamente cómo colocar los datos en el algoritmo escrito y señala una operación con los mismos datos, pero no se percata de que opera con otra relación: reparte los metros de listón entre los niños.

> [Este ¿se puede esta división?] Sí [¿10 niños entre 2 metros (de listón)?] Sí (toca su cabello) [Dime ¿qué vas a dividir?] Se divide… eh… los 2 niños (señala el divisor) entre... (señala la galera) [Ajá] Los 10 metros de listón que estarían adentro (señala el dividendo) y los 2 niños afuera (señala el divisor y agrega junto al dividendo la letra m).

Para enfatizar que ahora lo que se le solicita es que divida los niños y no los listones, se le propone otra división. Andrea asimila la relación y por lo tanto, en esta ocasión, no toma como criterio el primer dato enunciado para usarlo como dividendo, se basa en la relación considerando la cotidianeidad.

> [Muy bien, a ver si podemos hacer otra más difícil, 1 niño entre 10 metros de listón] 10÷1 (escribe primero el divisor y después el dividendo) Toca a diez 10 porque 10 entre 1 da a 10.

Nuevamente, prima el teorema de la longitud en metros como divisor sobre el teorema del primer dato enunciado. Además, el primero se coordina con el criterio de cotidianeidad. Ante esta respuesta, se le plantea una división similar, pero ahora con un divisor menor al dividendo; y luego otra con los mismos datos, pero invertidos.

> [Ok ¿y 1 niño entre 2 metros de listón?] (en esta ocasión no escribe, piensa un momento) Le tocan 2 [¿y 1 metro entre 2 niños?] (mueve el bolígrafo y tampoco escribe la operación) Pues a medio metro [Muy bien, pues la verdad mira yo te estoy haciendo preguntas capciosas para ver cómo respondes, pero lo cierto es que trabajas muy bien].

Las respuestas de Andrea parten de un razonamiento basado en el plano de su experiencia: ella no atiende a las relaciones "formales" entre cantidades y medidas, se guía más por una relación intuitiva de la medida que considera correcta. Es hasta la siguiente división cuando cuestiona la posibilidad de dividir los niños.

> [Este… a ver ¿cómo divides… 5 niños entre…] ¿Cómo puedo dividir los niños? [¿Ves?, es lo que he estado diciendo desde hace rato, (risas)] (risas).

Se trata de un detalle que le lleva tiempo procesar y que muestra la existencia real de los esquemas filtradores de la información. Es una construcción de significaciones entre el entrevistador y Andrea en esta zona de comprensión que poco a poco fueron construyendo. Este rodeo era necesario para poder problematizar la distinción entre el orden de los datos y el resultado obtenido.

Al aceptar la posibilidad de dividir los niños entre los listones, lo resuelve correctamente

Una vez que ambos comparten la idea de poder dividir imaginariamente niños entre listones, se plantean nuevamente las divisiones para confirmar que se ha comprendido.

> [Si te dije 1 niño entre 2 metros de listón] Serían 2 metros entre 1 niño [Entonces vamos a suponer que se pueda dividir 1 niño entre 2 metros de listón] 1/2 [¿Cuánto te da ahí?] (Resuelve la operación) .5 me daría a punto cinco (risas) sería… es que no sé cómo se puede decir… bueno podría ser… niño que sea punto cinco de niño.

Andrea expresa que debería ser 2 metros entre 1 niño, pero en la hipotética posibilidad de dividir 1 niño (de papel, por ejemplo) entre 2 listones, escribe correctamente la división, a pesar de que el divisor representa una longitud en metros. Es la primera ocasión en la que ese criterio ya no es prioridad y en la que además expresa verbalmente el resultado de manera creativa y correcta. Lo que observamos es que el significado de las cantidades está asociado a una magnitud.

Resumen de los logros alcanzados durante la entrevista

Andrea logra reconstruir, junto con el entrevistador, el proceso que le permitió ir expresando y modificando sus hipótesis sobre la división. Reconoce que algunas de ellas fueron correctas, como por ejemplo "lo primero que se enuncia es el divisor", pero también reconoce que es equivocada la idea de que al cambiar los datos en la división escrita, las unidades se mantienen fijas.

> [Bueno, entonces vamos a hacer un recorrido, ¿primero pensabas que los metros iban adentro y lo demás afuera?] Sí, después dije que lo primero que decías es lo que iba adentro y lo demás iba afuera (señala la operación de la Figura 11) Ahí sí ya está bien [Sí, ahí está bien] Pero lo que está mal es que dije que si cambian las cosas sigue siendo lo mismo, pero no, cambian las cosas [Cambia todo, entonces siempre debes pensar bien qué vas dividir entre qué… puedes dividir metros entre pasos, pasos entre metros y dependiendo de cómo quieras dividir es como lo vas a acomodar ¿se te va a olvidar?] No [Bueno…] Ya para la otra [Trabajaste muy padre, muchas gracias, este… nos tardamos mucho pero valió la pena] Sí [Gracias].[2]

Con base en los datos anteriores podemos tener una idea más clara de los razonamientos que los estudiantes realizaron al momento de enfrentar el problema en el primer estudio (Bustamante y Vaca, 2014); eso es lo que dio lugar a la entrevista con Andrea. Primero, la mayoría de los estudiantes logró identificar una relación proporcional y determinó que hay que dividir 35 entre 70 para llegar al resultado. Después requirieron representar gráficamente esa operación. Si de la fase experimental de este estudio descartamos las respuestas correctas (N=113, 34.4%) y las que consideramos que reflejan una incomprensión del problema (N=82, 25%), y nos quedamos con quienes optaron por una división 35÷70 o 70÷35 con o sin unidades (N=134, 40%), el 65% de estos eligió 70÷35, que, según el análisis realizado con Andrea, puede deberse a dos teoremas-en-acto:

- "el dividendo es el número mayor";
- "en la escritura de la notación matemática se emplean las reglas del sistema alfabético de escritura".

En relación con las unidades, las dificultades encontradas podrían estar vinculadas con los siguientes teoremas-en-acto que Andrea mostró durante la entrevista.

- "el resultado numérico no requiere una unidad de referencia; no se pueden dividir cantidades discretas";
- "solo las magnitudes pueden dividirse (la distancia es lo que va adentro de la 'casita')";
- "es posible disociar el número de su unidad de referencia (si se cambian de orden los datos numéricos en una división, las unidades permanecen fijas)".

[2] La entrevista duró 59 minutos con 13 segundos.

Otras dificultades están relacionadas con la falta de correspondencia entre los diferentes planos de representación: por ejemplo, entre el significante numérico de la medida y su ubicación en el instrumento de medida (la cinta métrica); algunas más se relacionan con la indiferenciación de lo que representan los números: las magnitudes continuas (los metros), las discretas (los pasos) y los operadores escalares y operadores de función.

Conclusiones

Con base en el análisis microgenético realizado al proceso de resolución de Andrea, ahora podemos inferir nuevas explicaciones para la decisión de los estudiantes de dividir 70÷35 en lugar de 35÷70 (no solo la eligen porque es más fácil). También podemos hacer suposiciones sobre la razón de las dificultades para asignar unidades de medida a los resultados numéricos obtenidos.

Ante situaciones que involucran conceptos, nociones y procedimientos aún no consolidados, los estudiantes emplean teoremas-en-acto de otros ámbitos que ya dominan, como los del sistema de escritura alfabética, para escribir la notación matemática. Esto los lleva a relacionar biunívocamente cada elemento de la expresión verbal con un significante gráfico de manera lineal y de izquierda a derecha, lo que provoca que, ante una expresión verbal correcta de una división, se represente gráficamente la relación invertida. Al respecto Roy Harris (1999) propone una teoría semiológica integracional y plantea que "la estructura escrituraria de la matemática está diseñada con el objetivo de integrar diversos tipos de cálculos" (p. 187) y no obedece a un intento de hacer corresponder esta notación con el habla, por lo que la llama escritura no glótica. Menciona que el invento más decisivo de la antigüedad fue la notación sumeria basada en la posición y que marca una diferencia con los sistemas de escritura glóticos.

> Desde una perspectiva semiológica, esta invención representa no una evolución, sino una ruptura total con la noción de que los signos escritos deben acordar con o reflejar las estructuras de la lengua oral. En otras palabras, esa notación no podría haberse inventado en absoluto si la integración con el habla hubiera sido la preocupación principal del inventor (op cit., p. 190).

En el caso de la escritura de la división —lo que nos ocupa en el problema a investigar—, su disposición está relacionada con la sintagmática de la escritura matemática que Harris de nomina tabular, refiriéndose a las tablas de cuadrados y raíces cuadradas de origen babilónico, "donde dos conjuntos de factores determinan conjuntamente la significación de un serie interrelacionada de formas discretas" (op cit., p. 195). Se trata entonces de un sistema de escritura con características y lógica propias que favorecen los cálculos y apoyan a la memoria. Aparentemente su dominio requiere que los estudiantes lo comprendan para diferenciarlo del sistema de escritura alfabética.

Si consideramos que el pensamiento, en términos de Vergnaud (2004), consiste en operaciones tanto conceptuales como preconceptuales sobre los significados y, a la vez, en operaciones simbólicas sobre los significantes, los cuales forman varios sistemas simbólicos distintos que tienen vínculos entre ellos y con el significado, entonces la labor del mediador, en este caso, fue la de centrar la reflexión de Andrea sobre las operaciones simbólicas sobre los significantes para ir modificando los significados construidos previamente.

Este proceso de interacción es posible gracias a que el entrevistador tiene un referente de cómo evolucionan las relaciones entre conceptos y teoremas-en-acto que llevan a la comprensión del problema, así como de la influencia de los aspectos conceptuales que provocan un diferente nivel de complejidad en los problemas (Flores, 2005).