

Enseñar Geometría en Secundaria

* Manuel Barrantes López,
** Idalgo Balletbo Fernández y
*** Manuel Ángel Fernández Leno

Resumen

Reflexionamos en este trabajo sobre las metodologías, resolución de problema y de laboratorio, en Secundaria y sugerimos distintos recursos y actividades que se pueden desarrollar con ellas, para una más significativa enseñanza-aprendizaje de la Geometría, mediante un exhaustivo estudio bibliográfico Vfruto de nuestras investigaciones.

Nuestro objetivo general es intentar que las concepciones y creencias de los profesores, en formación o en activo, vayan evolucionando progresivamente hacia tendencias más constructivistas en las que para enseñar Geometría, sientan la necesidad de utilizar estas metodologías en las que sus alumnos son el eje de aprendizaje.

Palabras Clave

Geometría, Enseñanza, Aprendizaje, Recursos, Materiales, Secundaria.

Abstract

We reflect on this work on methodologies, problems solving and laboratory in secondary and suggest different resources and activities that can be developed with them, for a more meaningful teaching and learning of Geometry through a bibliographical study of our research results.

Our overall goal is to try that conceptions and beliefs of teachers, in training or active, progressively evolve towards more constructivist trends in which to teach Geometry, feel the need to use these methods in which students are the backbone of learning.

Key Word

Geometry, Teaching, Learning, Resources, Materials, Secondary.

Antecedentes de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en Secundaria

Si hacemos un poco de historia sobre la enseñanza de la Geometría en las últimas décadas, podemos observar que ésta se caracterizaba por una fuerte tendencia a la memorización de conceptos y propiedades, que muchas veces se basaban en otros conceptos anteriores que también habían sido memorizados y no comprendidos por los alumnos. La resolución de los problemas se hacía de forma automática y en lugar de trabajar elementos geométricos se trataban aspectos métricos, es decir, el profesor apenas se detenía en el estudio de aspectos y propiedades geométricas, pasaba

enseguida al mundo de las medidas, planteando actividades como los cálculos de ángulos, lados, triángulos, volúmenes...

Esta enseñanza de la Geometría daba lugar a una serie de inconvenientes entre los que podemos destacar las grandes dificultades de comprensión de los conceptos por parte de los alumnos y el fuerte desánimo del profesor ante el fracaso de su enseñanza.

Nuestros estudios sobre poblaciones de futuros profesores que fueron enseñados con estas metodología nos muestran el poco conocimiento que tienen sobre la geometría y su enseñanza-aprendizaje, presentando a veces lagunas de conocimientos importantes (Barrantes y Blanco, 2006).

Actualmente, la enseñanza de la Geometría ha pasado de ser considerada una materia secundaria a ser una disciplina importante cuyos contenidos ocupan una parte considerable del currículo que se imparte en la Enseñanza Secundaria.

Uno de los principales cambios en los currículos actuales de las Matemáticas ha sido precisamente la recuperación de la Geometría, no en el sentido tradicional como materia de contenidos, sino como disciplina mediante la que podemos conseguir un mejor conocimiento del espacio y como fuente de modelos y situaciones problemáticas, útiles en otros contextos o contenidos matemáticos.

Así, la principal finalidad de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría es conectar a los alumnos con el mundo en el que se mueven, pues el conocimiento, la intuición y las relaciones geométricas resultan muy útiles en el desarrollo de la vida cotidiana.

La Geometría tiene una gran influencia en el desarrollo del alumno, sobre todo en las capacidades relacionadas con la comunicación y la relación con el entorno. Es una materia especialmente importante en estas edades

*Doctor en Matemáticas. Profesor Facultad de Educación. Universidad de Extremadura. Badajoz. España.

**Máster Univ. en Investigación para la Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas por la Universidad de Extremadura. Máster en Educación Superior por la Universidad Autónoma de Asunción. Docente de la Facultad de Ciencias Aplicadas y de la Facultad de Ciencias Contables, Administrativas y Económicas de la U. Nacional de Pilar. Ñeembucú-Paraguay.

*** Licenciado en Física. Profesor Facultad de Educación. Universidad de Extremadura.

en las que el alumno, aunque sea de Secundaria, necesita seguir verificando mediante la manipulación de objetos reales, pues esto influye en el desarrollo posterior de las capacidades matemáticas necesarias como la abstracción.

La capacidad espacial de los alumnos es muchas veces superior a su destreza numérica e impulsar y mejorar esta capacidad junto con el dominio de los conceptos geométricos y el lenguaje les posibilita para aprender mejor las ideas numéricas, las de medición e incluso otros temas más avanzados.

Por tanto, proponemos dos grandes objetivos para la enseñanza de la Geometría. Por una parte, desarrollar su adecuación al medio ambiente, es decir, dar oportunidades para que el alumno explore el espacio tridimensional y por otra, preparar al alumno para el aprendizaje de niveles superiores, esto es, familiarizarles con cuestiones que surgirán en un futuro mediante un enfoque basado en el razonamiento lógico.

Así pues, la enseñanza de la Geometría debe planear aquellos contenidos útiles en el futuro desarrollados mediante una metodología dinámica en la que el alumno realice razonamientos, representaciones, relaciones y resolución de actividades.

Esta metodología debe lograr que los alumnos no recuerden la Geometría como una materia aburrida sino que se produzca un cambio en su actitud y se interesen por las actividades geométricas de una forma natural, es decir, que les resulte una materia atrayente y motivadora.

Debemos enseñar Geometría para todos, independientemente del futuro trabajo que el alumno desarrolle. Los alumnos deben saber resolver los problemas que se les puedan plantear en la vida ordinaria adaptados a su nivel, pues a veces los problemas reales son demasiados complejos. Mediante estas tareas debe desarrollar capacidades intelectuales que le permitan saber informar sobre el espacio exterior en el que se mueve y utilizar los conocimientos geométricos para interpretar distintas situaciones.

En los apartados siguientes estudiamos esta caracterización actual centrándonos en la metodología y a partir de ella las distintas actividades que se pueden desarrollar en el aula.

De la metodología

La enseñanza de la Geometría tradicionalmente ha tenido un enfoque deductivo dándose prioridad a la memorización de conceptos, teoremas y fórmulas. Estas limitaciones formales, simbólicas y algebraicas iban en perjuicio de la intuición como una primera manera de acceder al conocimiento geométrico pues la manipulación, el tacto, la vista y el dibujo deben permitir al alumno habituarse a las figuras, formas y movimientos de su entorno para posteriormente establecer las abstracciones precisas.

Así pues, se formaban excelentes calculistas de medida, alumnos teóricos que en el contexto del aula eran capaces de resolver complicados problemas geométricos pero que en la práctica de la vida cotidiana dudaban cuando tenían que resolver un problema geométrico elemental.

En los contenidos actuales de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría se pretende establecer una serie de destrezas cognitivas de carácter general que puedan ser utilizadas en muchos casos particulares y que contribuyan por sí

mismas a desarrollar las capacidades del conocimiento de los alumnos.

Estos contenidos se caracterizan por tener una visión práctica del aprendizaje, valorando y aplicando los alumnos sus conocimientos dentro y fuera del aula. Se pasa de inventar problemas y de suponer datos sobre la pizarra a resolver ejemplos reales que desarrollen la creatividad, el ingenio y la iniciativa de los alumnos promoviendo unos contenidos intuitivos que sienten las bases para su análisis posterior.

La principal finalidad de la enseñanza-aprendizaje de la Geometría es conectar a los alumnos con el mundo en el que se mueven

Estos contenidos potencian también la elaboración y utilización de estrategias personales que muestran al profesor la manera de pensar y actuar de sus alumnos, de forma que pueda adaptar o modificar estas estrategias, cuando sea necesario, para realizar un aprendizaje más preciso y significativo.

En este sentido, la línea general es trabajar la Geometría desde una metodología de resolución de problemas o una metodología de laboratorio mediante las que el alumno además de realizar actividades, sobretodo aprende.

Estas metodologías, parten de una concepción constructivista del aprendizaje basada en que aquellos conocimientos construidos por los propios alumnos son realmente operativos, duraderos y generalizables a diferentes contextos. Por el contrario, los conocimientos que simplemente se transmiten a los alumnos, no construidos por ellos, no quedan integrados en sus estructuras lógicas y sólo pueden aplicarlos en situaciones similares a las del aprendizaje.

Es precisamente en la Secundaria cuando el profesor debe aprovechar los conocimientos empíricos de los alumnos para transformarlos en otros más estructurados y rigurosos sin olvidar, en esta etapa, los planteamientos experimentales pues el alumno todavía puede seguir manipulando y aprendiendo intuitivamente.

De la metodología de resolución de problemas

La metodología de resolución de problemas considera el alumno como el protagonista de su aprendizaje, mientras que el papel del profesor es elegir situaciones y problemas con el fin de despertar el interés y fomentar la actividad creadora para que dicho alumno construya su propio conocimiento.

Así pues, la metodología de resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la geometría está basada en el aprendizaje de los conceptos geométricos mediante tareas inmersas en un contexto. Es decir, resolver problemas con las mismas características de la vida real en la que no necesariamente las situaciones y problemas que se presentan son perfectamente acabados y modélicos.

En esta metodología es muy importante tener en cuenta que los estudiantes resuelvan problemas adecuados a su nivel de conocimientos pues en caso contrario el alumno, al fracasar repetidas veces, no se verá compensado con el éxito y no desarrollará capacidades de resolución de problemas satisfactoriamente.



ICEUABJO (2013). Dodecaedro estelado, figura de origami modular

El papel del profesor es el de guía en la construcción del conocimiento geométrico del alumno, ajustando el nivel de ayuda pedagógica a las diferentes necesidades que se presenten en la resolución. También tiene que adoptar una metodología flexible, impulsando relaciones entre iguales, potenciando los grupos heterogéneos y teniendo siempre presente su rol como modelo de valores. La actitud positiva del profesor hacia la Geometría condicionará en el alumno el gusto por esta materia, el interés por aprenderla y su éxito en la misma.

La resolución de los problemas geométricos requiere tres etapas en las que se debe dar más importancia a los procedimientos como objeto de contenido y para ser coherente con los principios del aprendizaje significativo interesa, partir de una situación real de nuestro entorno.

1) Tenemos una primera etapa motivadora de experimentación en la después de hacer una lectura atenta del enunciado (para saber que tenemos que hacer, traducción a los lenguajes geométricos...), el alumno realice diferentes pruebas o ensayos relacionados con el entorno real que le hagan comprender mejor el problema.

2) Una segunda etapa de resolución del problema en la que el alumno una vez conoce cuál es el problema que se plantea, busca estrategias para resolverlo (esquemas gráficos, materiales, recursos, relación con otros problemas conocidos etc.) Aplica dichas estrategias y lo resuelve. Una vez resuelto el problema el alumno realiza varias reflexiones orales o escritas para: comprobar que la solución hallada es acorde con los datos del problema, razonar el sentido de la solución o estudiar la adecuación del método utilizado de resolución.

Esta etapa se caracteriza por ser de comprensión, el alumno reflexiona e interioriza para lograr que los aprendizajes sean lo más significativos posible.

3) Una última etapa de aplicación, para profundizar y comprobar los conocimientos aprendidos, en la que se realicen otros ejercicios y problemas del entorno real como refuerzos y en los que también puedan surgir nuevos conceptos.

La resolución de problemas pone de manifiesto la eficacia del trabajo en grupo tanto en el ámbito del planteamiento o en la resolución de problemas como en la superación de las dificultades de los alumnos menos dotados. Muchas veces la dificultad de aprendizaje está más relacionada con las estrategias de enseñanza de la Geometría que con el contenido.

La resolución de problemas refuerza aspectos importantes que hay que tener en cuenta en el aprendizaje como son la competencia lingüística, los algoritmos, destrezas y estrategias. Además, los contextos adecuados al tipo de alumno que tengamos en el aula, motivan y hacen relevante el uso de la Geometría en la vida ordinaria. Por ejemplo, Reeuwijk (1997) presenta cuatro ejemplos de contextos (excursión, alas delta, sombras, bomberos) diferentes entre sí pero relacionados con los conceptos geométricos de proporción, la inclinación y la pendiente. Mediante los distintos contextos y después de unas fases de exploración y desarrollo del proceso de aprendizaje, los alumnos aprenden esos conceptos geométricos de forma intuitiva.

Sin embargo, aunque las teorías innovadoras de la Educación Matemática consideran que el contexto debe ser realista y de la vida cotidiana es necesario que el contexto tenga sentido para el alumno para que pueda posibilitar y respaldar el desarrollo de la reinención de las Matemáticas. Por ello incluso un contexto artificial relacionado con algo que no procede de la vida real, como puede ser un relato de ficción, puede ser bueno si tiene sentido para el alumno.

De la metodología de laboratorio

Mientras en la resolución de problemas queremos desarrollar habilidades y procesos, en la metodología de laboratorio ponemos el acento en la formación de los conceptos, aunque estos aspectos van íntimamente ligados pues el desarrollo de habilidades y procesos produce una formación sólida de conceptos y viceversa. Por tanto, estas metodologías son complementarias y deben ser tratadas simultáneamente.

En el laboratorio de Geometría se sigue un proceso gradual y personal de construcción de los conceptos, a la vez que se realiza una actividad investigadora sobre dicha construcción, resolución de problemas, innovación educativa, técnicas de colaboración, etc.

El lema del laboratorio de Geometría es “aprender haciendo”, es decir, el alumno participa activamente en la construcción de su propio conocimiento. Las tareas se proponen de forma que los alumnos aprendan mediante los sentidos de la vista y el tacto, la interrelación entre ellos y la interiorización.

El trabajo se hace en grupos y las investigaciones a realizar se componen de una serie graduada de actividades que se presentan a los alumnos divididas en los siguientes apartados: trabajo a realizar, material a utilizar, exploración de lo que ha hecho y descubrimientos realizados.

Debemos tener cuidado en la utilización de esta metodología pues puede ocurrir que no se cumplan los

objetivos deseados debido a la demasiada sofisticación del material. Otras veces, la poca cantidad de material hace que el alumno apenas lo manipule y no aprenda nada. Por último, debemos cerciorarnos que el material que hemos elegido asegura el aprendizaje del correspondiente concepto pues puede ocurrir que esto no sea así.

El siguiente apartado da diferentes ideas y ejemplos para llevar a cabo estas dos metodologías.

De las actividades para aplicar estas metodologías

Aunque hay una amplia literatura e investigaciones (Blanco, 2011) para la realización de actividades mediante resolución de problema o metodología de laboratorio, vamos a destacar algunas reseñas basándonos principalmente en su aplicabilidad en el aula de Secundaria, es decir, aquellos trabajos que pueden dar ideas a los profesores para programar actividades desde estas metodologías.

Existe un número importante de investigaciones y estudios, basadas en la metodología de resolución de problemas, mediante la que el alumno, además de estar motivado, aprende (Barrantes y Balletbo, 2013).

Por ejemplo, por su contenido didáctico, resaltamos el trabajo con alumnos de cuarto de Secundaria, de Real (2004) que presenta las cónicas como formas geométricas que se pueden generar de múltiples formas y que verifican propiedades que son utilizadas en la vida cotidiana.

En el mismo sentido, Flores (2002) muestra el interés matemático de los puzles ligado a sus cualidades topológico-métricas, que ponen a los alumnos frente a originales situaciones problemáticas en el espacio tridimensional, mediante las cuales pueden desarrollar un conjunto de aprendizajes y desarrollo de destrezas y habilidades espaciales que se contemplan en los Currículos oficiales.

Relacionado con la cinematografía, Thibaut (2004) desarrolla el Proyecto Cube: una introducción a la geometría tridimensional. Dicho proyecto es una propuesta de trabajo a partir de la película "Cube" donde se desarrollan una serie de actividades de introducción a la geometría analítica tridimensional y a la visualización espacial geométrica. Las características de la propuesta hacen que se presente como un proyecto abierto a la interdisciplinariedad e idóneo para la práctica del aprendizaje significativo en un contexto de prácticas procedimentales.

En esta misma línea, hemos encontrado una serie de artículos en los que se presentan propuestas muy educativas para Secundaria. Suelen ser actividades puntuales relacionadas con las figuras geométricas (Grupo Alquerque, 2001; Fernández y Reyes, 2001; 2005) o se refieren a métodos, estrategias, aproximaciones, que el alumno descubre, realiza, mediante la resolución de problemas (Grupo Alquerque, 2003, 2005; Cortés y Calvo, 2004; Munné, 2002; Pinyol, 2007, Romero, 2001)

En definitiva con artículos de corte teórico como Escribano (2000) que nos presenta tres demostraciones sobre el valor de la potencia de un punto, hasta artículos prácticos como Mercado y Custodio (2005) que nos enseña a diseñar camisetas teniendo en cuenta la geometría nazarí, el alumno adquirirá una actitud positiva, valorará y comprenderá la utilidad de las herramientas matemáticas, experimentando satisfacción por su uso, ya que éstas le posibilitan para organizar y comprender la información que le hace conocer la

realidad de una forma más plena, pues nos basamos en un aprendizaje globalizador. El alumno experimenta como las Matemáticas surgen de las situaciones reales.

De la geometría dinámica.

En otro orden de cosas, muy indicados para estas metodologías son esos materiales que desarrollan una geometría dinámica, es decir, los conceptos se aprenden mediante actividades en movimiento, como ángulos que rotan o líneas que se abren. Damiani y otros (2000) presentan una metodología de trabajo con modelos dinámicos, es decir, objetos geométricos con elementos móviles que dan firmeza a los conceptos y situaciones matemáticas. Estos modelos son contruidos por los alumnos, luego hay una fase de manipulación, observación y análisis de las posibilidades del modelo para pasar a plantear cuestiones complicadas que son fácilmente mostrables con estos modelos como por ejemplo "entre los infinitos paralelogramos isoperimétricos, el rectángulo tiene un área máxima". Para esta cuestión utiliza un móvil que es un paralelepípedo flexible formado por cuatro regletas de maderas iguales dos a dos.

La finalidad de los modelos es construir esquemas mentales abstractos aplicables a una variedad más amplia de problemas. Los modelos permiten prevenir, diagnosticar y superar errores o desconocimientos y aumentar el uso del lenguaje y la motivación de los alumnos.

Otro tipo de actividades son las relacionadas con el dibujo. El dibujo en Geometría sirve para poder representar figuras, mapas, planos, etc. en un principio de manera informal, para, posteriormente, poder efectuar una representación fiel y más precisa de la realidad.

Luelmo (1997) nos muestra la importancia de los instrumentos de dibujo para resolver problemas. Para Clements y Battista (1992) y Barrantes y Zapata (2008) los dibujos son importantes porque pueden hacer que los alumnos intuyan y comprendan algunas ideas geométricas, pero hay que tener cuidado de que no formen ideas erróneas del concepto. Es mejor manipular que dibujar pues el inconveniente de aquellos es que no son flexibles o modificables de una forma dinámica, salvo que utilicemos dibujos de programas de ordenador. En esta línea, Santinelli y Siñeriz (2001) nos muestran las diferencias de las construcciones con regla y compás, si se utiliza el lápiz y el papel o se utiliza el ordenador (programa Cabri). Para estas autoras, la discusión y comparación de estos métodos alternativos favorece la comprensión de los conceptos geométricos y la adquisición de estrategias de resolución de problemas.

Así pues, la utilización de la imagen como recurso didáctico tiene, también, diferentes ventajas. Los medios audiovisuales de comunicación están provocando en los alumnos, y en la sociedad en general, unos grandes cambios en sus formas de percibir y en sus procesos mentales debido al paso de una cultura escrita a una cultura audiovisual. Actualmente es imprescindible trabajar en el aula con un programa libre como Geogebra o comercializado como Cabri y sus distintas ampliaciones.

Por ejemplo, Pérez (2000) hace una descripción de aplicaciones disponibles en Internet para el programa Cabri-Géomètre, que nos permite la enseñanza de la Geometría de forma más visual. Así, García y Arriero (2000) utilizan el programa Cabri para el estudio de las cónicas (elipses y

parábolas) desde dos puntos de vista; la geometría clásica y la geometría analítica.

Mediante Cabri II se intenta también que los estudiantes redescubran los teoremas ya conocidos en Geometría. Se pretende que éstos, habitualmente meros receptores de la información, pasen a trabajar con ella y a desarrollar una creatividad científica. Pichel (2000) nos muestra como el alumno mediante la manipulación de figuras geométricas, como el cuadrado y el triángulo y en torno a los cuales reflexiona, puede llegar a inventar operaciones, estrategias o problemas.

En el campo de las transformaciones geométricas, Hoyos (2006) nos presentan algunas secuencias de trabajo sobre el aprendizaje de la homotecia, e isometrías. Los alumnos exploraban y manipulaban con Cabri-II, y un conjunto de pantógrafos con configuraciones geométricas distintas.

Utilizando Geogebra, Iaranzo y Fortuny (2009) analizan parte de una investigación sobre la interpretación del comportamiento de los estudiantes de Bachillerato en la resolución de problemas de geometría plana, mediante el análisis de la relación entre el uso de GeoGebra, la resolución en lápiz y papel, y el pensamiento geométrico. Los autores buscan una relación entre las concepciones de los alumnos y las técnicas que utilizan en las estrategias de resolución de problemas.

También, dentro de los recursos informáticos, Real (2008a, 2008b y 2009) no presenta tres aplicaciones de software libre relacionada con la geometría.

El primero es la presentación de Dr. Geo, una aplicación geométrica libre, que permite el estudio de la geometría plana de una forma interactiva. En el segundo caso nos muestra GTANS, un tangram que combina los puzzles con las figuras geométricas, y por último, la aplicación tecnológica denominada Superficies en 3D para el estudio de poliedros, gráficas, superficies de revolución, superficies paramétricas y muchas otras figuras. En todos los artículos encontramos las explicaciones necesarias para el manejo del software, así como ejemplos prácticos.

Queremos, ahora, prestar atención a un número importante de artículos relacionados con los fractales, entendidos como materiales para resolver problemas. Partimos de Redondo y Haro (2004, 2005) o Moreno (2002) que ofrecen actividades relacionadas con la geometría fractal dirigidas a alumnos de secundaria, presentando diferentes formas de generar fractales y algunas de sus aplicaciones. Este mismo autor (Moreno, 2003a) plantea una propuesta de actividades para un trabajo de investigación en secundaria, a través del estudio de familias de triángulos y tetraedros fractales de algoritmo lineal común.

Por otra parte, Moreno (2003b) utiliza el juego del caos en la calculadora gráfica. El algoritmo conocido como juego del caos es un método muy sencillo y eficaz para la generación de figuras fractales, consistente en realizar una sucesión de transformaciones sobre un sólo punto. Se desarrolla el juego del caos porque se pueden trabajar las transformaciones lineales en el plano, uno de los objetivos de las Matemáticas en Secundaria.

De los recursos manipulativos

Dentro de las metodologías de resolución de problemas o de laboratorio, son importantes también los

recursos manipulativos, pues el alumno de Secundaria debe seguir manipulando para poder abstraer los conceptos que aprende. De entre los recursos ya conocidos como tangrams, políominos, cuerpos geométricos..., nos vamos a detener solamente en las actividades con espejos y las construcciones o doblado de papel, que aunque parecen materiales de la Educación Primaria, también son buenos elementos para que el alumno de Secundaria, mediante las actividades adecuadas, construya su propio conocimiento.

Con espejos, el clásico trabajo Mandly (1998) desarrolla una unidad didáctica sobre transformaciones geométricas en la que con un libro de espejos: se generan polígonos regulares, se estudian las figuras planas, secciones de un cubo o "aproximación al infinito" en la que los alumnos experimentan como al aumentar el número de lados de un polígono, éste tiende a una circunferencia. También, Rodríguez (1996) y Alsina y Fortuny (1992) trabajan diferentes contenidos como polígonos, ángulos, superficies, isometrías.

Más actual es Bermejo (2002) que presenta aplicaciones didácticas del libro de espejo como complemento al libro de texto, en las que el alumno dibuja, construye y manipula figuras geométricas. En la misma línea, Murari y Pérez (2001) trabajan con caleidoscopios como un material didáctico, integrado en las ciencias (óptica geométrica), en el diseño geométrico y en la educación artística. Se articulan dos o tres espejos para la obtención de imágenes reflejadas según los distintos objetivos que pueden ser alcanzados sobre simetrías, polígonos regulares..., además de proporcionar situaciones que desafían y fomentan la creatividad.

Dentro de los trabajos con papel, Ledesma (2010), nos muestra cómo trabajar en cualquier nivel distintos contenidos matemáticos, triángulos, cuadriláteros, teorema de Pitágoras, con un simple y sencillo folio de formato DIN-A y varias piezas que se forman con éste. Una bonita introducción a las matemáticas con papel donde, en un claro contexto de resolución de problemas, se ponen en juego la imaginación, la creatividad y la originalidad, tanto del alumno como del profesor. Igualmente, Mercado (2010) describe cómo utilizar el papel maché en el aula de Matemáticas con alumnos de Secundaria. El autor nos enseña cómo los alumnos pueden elaborar materiales con papel maché y como el mismo docente puede hacer sus propios materiales didácticos como conos, elipses en conos, triángulos esféricos, el cubo de soma, etc.

Varios autores (González, 2000; Garrido, 2010; Royo, 2010; Moreira 2010; Mora, 2002; Fernández y Prieto, 2005; Ramírez, 2005; Grupo Alquerque, 2007; 2008; Blanco, Otero y Pedreira, 2010) proponen el uso del papel para la construcción de elementos geométricos como poliedros regulares, estrechados... y estudiar sus propiedades siempre como materiales aptos para la enseñanza y el aprendizaje en el aula de diferentes contenidos y actividades.

ICEUABJO (2013)



También, Martínez y López (2001) además de las actividades con papel utilizan el programa Cabri para generalizarlas y para realizar actividades de refuerzo.

No debemos dejar de citar el conocido texto de Jhonson y Wenninger (1975) dedicado íntegramente a la Geometría del papel, tanto plana como espacial. Presenta una gran cantidad de actividades doblando o recortando papel y elementos espaciales como esferas, poliedros regulares, sólidos arquimedianos...

El objetivo de la utilización de este material es introducir o reforzar la enseñanza de la mayoría de los conceptos y propiedades geométricas mediante doblado de papel antes de trabajarlo con otros elementos como pueden ser los instrumentos de dibujo y antes de formalizarlos más rigurosamente.

De la historia, otras materias y el Arte como recursos

Por otra parte, la historia y la evolución del edificio matemático, las curiosidades matemáticas, la relación con otras materias o con las mismas matemáticas, son poderosos instrumentos motivadores que harán que el alumnado tenga interés por la adquisición de los conocimientos matemáticos.

Actualmente han seguido apareciendo trabajos relacionados con la historia y las matemáticas, como Illanas (2008) que hace un recorrido por las Matemáticas que se desarrollaron en Mesopotamia, el sistema de numeración de base sexagesimal y el estudio, mediante las tablillas babilónicas, de áreas de triángulos y trapecios, longitud de la circunferencia y área del círculo entre otros aspectos matemáticos.

Estos artículos sobre la historia, no suelen solamente tratar la figura de algún matemático conocido, sino que de forma práctica presentan y muestran algunos de sus trabajos. Por ejemplo, Gutiérrez (2006) nos presenta la figura y la resolución por J. Bernoulli, de un problema relacionado con la determinación de las curvas; las espirales por las que sentía gran atracción y termina el artículo con la distribución binomial que lleva su nombre. También, Usón y Ramírez (2005) analizan el origen del Triángulo de Pascal y hace un recorrido histórico hasta el origen del triángulo.

En la misma línea, Pérez, Álvarez y Porta (2008) pretenden, desde un enfoque competencial, despertar en el alumnado el interés por la historia de un problema matemático: la cuadratura del círculo. Este problema puede contribuir a que el alumno adquiera destrezas en el trazado de construcciones gráficas y en el cálculo de las medidas de líneas que las componen. El artículo realiza una breve introducción histórica al problema y se describen las actividades realizadas.

Con respecto a la banda de Möbius, los autores Granados, Grau y Nuñez (2007) además de una breve biografía de este personaje, indagan y trabajan con los alumnos la famosa banda como herramienta para potenciar la motivación y su interés en las clases de matemáticas. Los alumnos aprenden a construirla y algunas aplicaciones.

Es poco común en el aula relacionar la Geometría con otras partes de las matemáticas, pero como veremos, esta materia es una buena herramienta cuando se utiliza en materias como álgebra, probabilidad, análisis, estadística...

Por ejemplo, Ruiz (2001) establece la importancia de aprovechar los conocimientos de geometría que poseen los alumnos para explicar el concepto de probabilidad,

poniendo de relieve lo adecuado que es, desde un punto de vista didáctico, la unión de la geometría y la probabilidad.

En la misma línea, Varo (2000) hace una interpretación geométrica de la regla de los signos para el producto de enteros y Aledo y Cortés (2001) muestran un buen enfoque geométrico para iniciar a los alumnos en el tema de sumas geométricas de series numéricas como complemento al enfoque analítico-algebraico que se vienen realizando normalmente. Redondo (2008) pretende trabajar transversalmente Álgebra y Geometría, revisando algunos aspectos históricos, propiedades y actividades sobre el número de oro y el número de plástico que pertenecen a la clase de los números mórficos.

La relación de la Geometría con otras materias como el Arte es un tema también presente en los artículos. En nuestro texto Barrantes (1998a) ya incluíamos un capítulo dedicado a este tema, para trabajar con los alumnos a partir de la relación de la Geometría con la pintura, escultura, arquitectura, etc. Por ejemplo, Martín (2008) hace el estudio de El Bautismo de Cristo desde una perspectiva matemática, donde cubos e hipercubos son algunos de los elementos que se relacionan con esta pintura de El Greco. Por su parte, Corrales (2004) se centra en el análisis de las dimensiones a partir del estudio de los cuadros del Dalí o la revisión de la obra del excelente artista Cornelius Escher (Corrales, 2005 a y b) inspirada en las matemáticas. Millán (2004) nos habla de Leon Battista Alberti, uno de los principales representantes del Renacimiento italiano, parte de su obra está dedicada a las matemáticas, su principal obra *Ludi matematici* trata la geometría práctica, esto es, las reglas de medición de superficies de terrenos, altura de torres, distancias entre ciudades,...

Por último desde las construcciones, García (2005) da distintas hipótesis geométricas para interpretar como se han construido ciertos edificios medievales. Su estudio se centra concretamente, en los restos de una basílica visigoda situada en el yacimiento arqueológico del Tolmo de Mina-teda en Hellín y se compara lo obtenido con otros emplazamientos históricos de otras provincias en España y Portugal.

Ideas finales

Desde las propuestas curriculares actuales y de las distintas aportaciones reseñadas, podemos concluir que la nueva culturización exige un cambio en los contenidos y metodología de enseñanza de la Geometría en la Enseñanza Secundaria, mas orientados hacia metodologías activas como son la resolución de problemas y la metodología de laboratorio.

Esto implica que los profesores deben desarrollar los conocimientos necesarios que le permitan elegir y adecuar los recursos y materiales conocidos a las situaciones determinadas de enseñanza-aprendizaje. Los materiales, los recursos y las actividades deben, por una parte, favorecer el aprendizaje de los alumnos y por otra, servir de instrumento de formación del profesor, pues el contraste entre su conocimiento práctico y lo que vaya aprendiendo con el material deberá desembocar en una mejora de su práctica docente.

Las reseñas bibliográficas de este artículo hemos pretendido que sean lo más prácticas posibles en esta idea de mejorar las tareas de los profesores y convertirlos en buenos guías del aprendizaje de sus alumnos.

Nuestro objetivo general es intentar que las concepciones y creencias de los profesores, en formación o en activo, vayan evolucionando progresivamente hacia tendencias más constructivistas en las que para enseñar Geometría, sientan la necesidad de utilizar estas metodologías en las que sus alumnos son el eje de aprendizaje. Es decir, un cambio personal significativo en su conocimiento y metodología sobre la enseñanza-aprendizaje de la Geometría (Barrantes y Blanco, 2004). ✎

Fuentes de consulta

- Aledo, J.A. y Cortés, J. C. (2001), "Suma geométrica de series numéricas", en *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*.
- Alsina, C. y Fortuny, J. M^a. (1992). Miralandia. Un viaje geométrico al país de los espejos. Proyecto Sur. Granada.
- Barrantes, M.(ed.) (1998a). La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria. Cáceres. Servicio Publicaciones de la Universidad de Extremadura.
- Barrantes, M y Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la Geometría escolar. Enseñanza de las Ciencias.
- Barrantes, M y Blanco, L. J. (2006). A study of prospective Primary teacher's conceptions of teaching and learning geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Vol .9, nº 5 ,411-436.
- Barrantes, M. y Zapata,M. (2008). "Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas" en *Campo Abierto* . Vol. 27, nº1.
- Barrantes, M.; Balletbo, I. y Fernández, M. A. (2013). "La enseñanza-aprendizaje de la Matemática (Geometría) en Educación Secundaria en la última década", en *Premisa. Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática*. Año 15, nº 56.
- Blanco, L.J. (2011). La Investigación en Educación Matemática. *Educatio XXI*. 109–128. <http://revistas.um.es/educatio/article/view/119891/112871>
- Blanco, C.; Otero, T. y Pedreira, A. (2010), "Rompecabezas matemáticos en papel : tetraedro, octaedro y estrella octángula", en *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*.
- Clements, D. H. y Battista, M. T.(1992). *Geometry and Spatial Reasoning*. En D. A. Grouws.(ed.). *Handbook of research on Mathematics teaching and learning*. Nueva York. MacMillan.
- Corrales, C. (2004). "Salvador Dalí y la cuestión de las dimensiones" en *Suma*. No.47.
- Corrales, C. (2005a), "Escher I: las matemáticas para construir" en *Suma*. No. 49.
- Corrales, C. (2005b), "Escher II: las matemáticas para pensar" en *Suma*. No. 50.
- Cortés J. C. y Calvo, G. (2004), "El método de Descartes para trazar normales a curvas" en *Suma geométrica de series numéricas*, 2004, No. 47.
- Damiani, A. M. y otros. (2000) "El uso de modelos dinámicos en la Didáctica de las Matemáticas" en *UNO*.
- Escribano, J. R. (2000), "Algunas demostraciones del valor de la potencia de un punto con respecto a una circunferencia" en *Suma*, 2000, No. 35.
- Fernández, I. y Reyes, M. E. (2001) "Construcciones y disecciones del octógono" en *Suma*, No. 38.
- Fernández, I. y Reyes, M. E. (2005), "Polígonos y estrellas" en *Suma*, No. 49.
- Fernández, A. y Prieto, M. (2005), "Icosaedro y ph" en *Suma*. No. 48.
- Flores, P. (2002), "Laberintos con alambre (estructuras topológico-métricas)" en *Suma*, No. 41.
- García, I. y Arriero, A, C. (2000), "Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas" en *Suma*, No. 34.
- García, M. (2005), "El Tolmo de Minateda: historia y matemáticas" en *Suma*, No.51.
- Garrido, M. B. (2010), "Orisangakus: problemas sangaku con papiroflexia como recurso para el estudio de la geometría" en *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, No. 53.
- Gonzalez, E. (2000), "Geometría del papel: una experiencia de uso de materiales matemáticamente potentes" en *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*. La Laguna, 2000, Vol. 42.
- Granados, A. B.; Grau, A. y Núñez, J. (2007), "La banda de Möbius: un camino que te llevará de cabeza" en *Suma*, No. 54.
- Grupo Alquerque, (2001), "Cubo de Muñoz" en *Suma*, No. 37.
- Grupo Alquerque, (2003), "Rompecabezas del teorema de Pitágoras" en *Suma* No 43.
- Grupo Alquerque (2005), "Cuadraturas de polígonos regulares" en *Suma*, No. 48.
- Grupo Alquerque (2007), "Estrella de seis puntas" en *Suma*, No. 56.

Grupo Alquerque (2008), “Doblar y cortar (kirigami geométrico)” en *Suma*, No. 59.

Gutiérrez, S. (2006), “Jakob Bernoulli: la geometría y el nuevo cálculo” en *Suma*, No. 51.

Hoyos, V. (2006), “Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria”, en *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, Vol. 24.

Iranzo N. y Fortuny J. M. (2009), “La influencia conjunta del uso de geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencia del alumnado” en *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, Vol. 27.

Illana, J. (2008) “J. Matemáticas y astronomía en Mesopotamia” en *Suma*, No. 58.

Jhonson, D. A. y Wenninger, M. J. (1975), “Matemáticas más fáciles con manualidades de papel”. Barcelona: Distein.

Ledesma, A. (2010), “Aventuras y desventuras matemáticas de un folio DIN-A en el instituto” en *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, No. 53.

Luelmo, M. J. (1997). Construcciones geométricas: Una experiencia interdisciplinar de autoformación. Epsilon.

Mandly, A. (1998). Transformaciones isométricas. En Barrantes, M.(ed.) (1998): La Geometría y la Formación del profesorado en Primaria y Secundaria.

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. Martín, F. (2008) “El Greco en otra dimensión” en *Suma*. No. 59.

Martínez, E. y López, J. A. (2001), “Puntos, rectas notables y propiedades de los triángulos. Una actividad interdisciplinar utilizando dobleces de papel” en *Epsilon*, No. 50.

Mercado, A. I y Custodio, M. Z. (2005) “Diseñando camisetas: un viaje por la geometría nazarí” en *Suma*, No. 49.

Mercado, A. I. (2010) “Elaboración de materiales didácticos para el aula de matemáticas con papel maché” en *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, No. 53.

Millán, A. (2004) “Leon Battista Alberti, la ingeniería y las matemáticas del Renacimiento” en *Suma*, No. 47.

Mora, J. A. (2002) “Geometría de ayer y de hoy” en *Suma*, No. 39.

Moreira, E. (2010) “Enseñar y aprender matemáticas con origami” en *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, No. 53.

Moreno, J. C. (2002) “Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales” en *Suma*, No. 40.

Moreno, J. C. (2003a). (a). “Triángulos y tetraedros fractales” en *Suma*, No.

Moreno, J. (2003b) “El juego del caos en la calculadora gráfica: construcción de fractales en *Suma*, No. 42.

Munné, J. (2002) “Distintas formas de deducción de las fórmulas trigonométricas de suma o resta de ángulos” en *Suma*, No. 39.

ICEUABJO 2013, Elaboración de material didáctico

